ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES FRACTIONNAIRES

Tarek NACER

Okba MAHDI

17 mai 2017

Table des matières

1 Préliminaires **3**

1.1 Outils de base 4

1.1.1 Espaces L^p 4

1.1.2 Théoréme de convergence domineé de **Lebesgue** 4

1.1.3 Quelques inégalités pratiques 4

1.2 Intégrale d'ordre entier 5

1.3 Intégrale fractionnaire 7

1.3.1 Fonctions spéciales : **Gamma** et **Bêta** 7

1.3.2 Intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** 8

1.3.3 Propriétes de l'intégrale fractionnaire 8

1.4 Dérivées fractionnaires 10

1.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** 10

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** 14

1.4.3 Relation entre les deux dérivées fractionnaires 15

1.4.4 Intégration par partie 18

2 Non éxistence de solutions globales pour des systèmes de réaction diffusion fractionnaires **19**

2.1 Introduction 20

2.2 Préliminaires 21

2.3 Résultats principaux 22

3 Conditions nécessaires d'existence locale et globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnaires **35**

3.1 Conditions nécessaires pour l'existence locale 36

3.2 Conditions nécessaires pour l'existence globale 40

Conclusion Générale **42**

Bibliographie 43

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires qui sont utiles dans les chapitres suivants, d'abord, nous donnons quelques définitions, théorèmes et inégalités utiles (espaces L^p, convergence domineé, inégalité de **Young ,**...etc), puis, nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. On se restreindre à deux approches les plus populaires et les plus pratiques (l'approche de **Riemann Liouville** et de **Caputo**) ainsi que leurs propriétés.

Sommaire

1.1 Outils de base **4**
1.1.1 Espaces L^p 4
1.1.2 Théoréme de convergence domineé de **Lebesgue** 4
1.1.3 Quelques inégalités pratiques 4
1.2 Intégrale d'ordre entier **5**
1.3 Intégrale fractionnaire **7**
1.3.1 Fonctions spéciales : **Gamma** et **Bêta** 7
1.3.2 Intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** 8
1.3.3 Propriétes de l'intégrale fractionnaire 8
1.4 Dérivées fractionnaires **10**
1.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** 10
1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** 14
1.4.3 Relation entre les deux dérivées fractionnaires 15
1.4.4 Intégration par partie 18

1.1 Outils de base

1.1.1 Espaces L^p

Les espaces L^p sont des espace de fonctions dont la puissance $p-ième$ de la fonction est intégrable, au sens de **Lebesgue**.
Soit $\Omega = [a;b](-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *On note par $L^p(a;b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ l'espace des fonctions f mesurables intégrables au sens de **Lebesgue** a valeurs réelles dans Ω telle que la norme $\|f\|_{L^p} \leq +\infty$, où*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < +\infty), \tag{1.1}$$

et pour $p = +\infty$ on a

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(t)|,$$

et $L^\infty(a;b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur $(a;b)$.

1.1.2 Théoréme de convergence domineé de Lebesgue

Théorème 1.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de L^1.On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p.sur* Ω,

b) *il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω*

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Preuve. voir [2]. ■

1.1.3 Quelques inégalités pratiques

Inégalité de Young ([2])

Soit p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.2}$$

Alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{1.3}$$

Inégalité de Young avec ε

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon) |b|^q , \tag{1.4}$$

où p et q sont strictement positifs liés par la relation : $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et $c(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

Inégalité de Hölder ([2])

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note q le conjugué de p c'est -à-dire le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et on a l'inégalité :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \tag{1.5}$$

Lorsque $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de **Cauchy Schwarz**.

Inégalité de Ju ([7])

Nous donnons l'inégalité de **Ju** dans une dimension $N \geq 1$ où $\beta \in [0,2]$ et $l \geq 1$,pour toute fonction positif de **Schwarz (**dans le cas général**)**

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi^l \leq l\phi^{l-1} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi. \tag{1.6}$$

1.2 Intégrale d'ordre entier

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$. On considére l'intégrale :

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau. \tag{1.7}$$

On utilise l'intégrale (1.7) pour considérer la intégrale d'ordre 2 (double) :

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_a^t I^1 f(\tau)\, d\tau = \int_a^t \int_a^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau d\tau_1 = \int_a^t \left(\int_\tau^t d\tau_1 \right) f(\tau)\, d\tau \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.8}$$

L'intégrale triple est donné par l'intégrale (1.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I^3 f(t) &= \int_a^t I^2 f(\tau_2)\, d\tau_2 = \int_a^t \int_a^{\tau_2} I^1 f(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2 = \int_a^t \int_a^{\tau_2} \int_a^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_a^t \int_\tau^t \int_{\tau_2}^t d\tau_1 d\tau_2 f(\tau)\, d\tau = \int_a^t \int_\tau^t (t-\tau_2)\, d\tau_2 f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Plus généralement la n-iéme itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^n f(t) &= \int_a^t I^{(n-1)} f(\tau)\, d\tau = \int_a^t d\tau \int_a^\tau I^{(n-2)} f(\tau_1)\, d\tau_1 \\ &= \int_a^t d\tau \int_a^\tau d\tau_1 \int_a^{\tau_1} I^{(n-3)} f(\tau_2)\, d\tau_2 = \int_a^t d\tau \int_a^\tau d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} I^{(n-4)} f(\tau_3)\, d\tau_3 \\ &= \int_a^t \underbrace{\int_a^\tau \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}}}_{(n-1)-\text{fois}} f(\tau_n)\, d\tau_n \cdots d\tau_2 d\tau_1 d\tau \\ &= \int_a^t d\tau \int_a^\tau d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Alors :

$$ {}_aI_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\boldsymbol{\tau})^{n-1} f(\tau)\, d\tau \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.10}$$

De méme maniére on a :

$$\begin{aligned} {}_tI_b^n f(t) &= \int_t^b d\tau \int_\tau^b d\tau_1 \int_{\tau_1}^b d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^b f(\tau_n)\, d\tau_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_t^b (\boldsymbol{\tau}-t)^{n-1} f(\tau)\, d\tau \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ces formules (1.10) et (1.11) sont appelée les formules de **Cauchy.**

1.3 Intégrale fractionnaire

1.3.1 Fonctions spéciales : Gamma et Bêta

Fonction Gamma

Définition 1.2 *La fonction* ***Gamma*** *d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, (\Re(z) > 0), \tag{1.12}$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}.$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ $(\Re(z) > 0)$.

Propriétés de la fonction Gamma

1. On peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2. Quand $z = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!.$$

3. Pour $z = n + \frac{1}{2}$

$$\Gamma(z) = \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{(2^{2n})\, n!}\sqrt{\pi}.$$

Fonction Bêta

Définition 1.3 *La fonction* ***Bêta*** *est une fonction à deux variables et est définie par l'intégrale suivante :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, (\Re(x) > 0, \Re(y) > 0). \tag{1.13}$$

Propriétés de la fonction Bêta

1. La relation entre la fonction **Gamma** et **Bêta**

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, (\Re(x) > 0, \Re(y) > 0).$$

2. La fonction **Bêta** est symétrique c'est-à-dire que :

$$\beta(x,y) = \beta(y,x).$$

3. La fonction **Bêta** est définie aussi par les intégrales :

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt. \\ \beta(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

D'aprés la formule de **Cauchy** et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma d'**Euler** : $\Gamma(n) = (n-1)!$; **Riemann** rendu compte que le second membre de (1.10) paurait avoir un sens méme quand n prenant une valeur non-entiére, il a définit l'intégrale fractionnaire de la maniére suivante :

Définition 1.4 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[a,b]$,On appelée intégrale fractionnaire d'ordre α de **Riemann-Liouville** à gauche l'integrale suivante :*

$$ {}_aI_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.14}$$

*et l'intégrale fractionnaire d'ordre α de **Riemann-Liouville** à droite par :*

$$ {}_tI_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.15}$$

1.3.3 Propriétes de l'intégrale fractionnaire

Propriétes :*Nous avons les propriétés suivantes :*

1. On pose par convention :
$$ {}_aI_t^0 f(t) =_t I_b^0 f(t) = f(t).$$

2. Lorsque $a = 0$ nous écrivons :
$$ {}_0I_t^{\alpha} f(t) = f(t) * \psi_{\alpha}(t),$$

telque :

$$\psi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t > 0.$$

3. $\psi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$,et $\psi_\alpha(t) = \delta$ quand $\alpha \to 0$ où δ : la distrubition de **Dirac.**

Théorème 1.2 *Si $f \in L^1([a,b])$, alors ${}_aI_t^\alpha f$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et de plus ${}_aI_t^\alpha f \in L^1([a,b])$.*

Preuve. D'aprés la définition (1.14) et la théorème de **Fubini** on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |{}_aI_t^\alpha f(t)|\, dt &= \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \right| dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau)|\, d\tau dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)| \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1}\, dt d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(\tau)| (b-\tau)^\alpha\, d\tau \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(\tau)|\, d\tau,
\end{aligned}$$

puisque $f \in L^1([a,b])$,alors :

$$\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(\tau)|\, d\tau < \infty.$$

Ce qui établit le résultat désiré. ■

Théorème 1.3 *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$,tellesque ${}_aI_t^\alpha f$ et ${}_aI_t^\alpha g$ existent presque partout .Deplus soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$,alors ${}_aI_t^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe presque partout sur $[a;b]$, et on a :*

$${}_aI_t^\alpha(\lambda f + \mu g)\{t\} = \lambda({}_aI_t^\alpha f)(t) + \mu({}_aI_t^\alpha g)(t),$$

c-à-d :l'intégrale fractionnaire est un opérateur linéaire.

Théorème 1.4 *Pour tout $f \in C([a,b])$ et soient $\alpha > 0, \beta > 0$,l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** possède la propriété du semi-groupe :*

$${}_aI_t^\alpha \left\{ {}_aI_t^\beta f(t) \right\} = {}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t) = {}_a I_t^\beta \left\{ {}_aI_t^\alpha f(t) \right\}, \tag{1.16}$$

et

$$ {}_tI_b^{\alpha}\left\{{}_tI_b^{\beta}f(t)\right\} = {}_t\,I_b^{\alpha+\beta}f(t) = {}_t\,I_b^{\beta}\left\{{}_tI_b^{\alpha}f(t)\right\}. $$

Preuve. D'aprés la définition (1.14) on a :

$$\begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}\left\{{}_aI_t^{\beta}f(t)\right\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[{}_aI_t^{\beta}f(\tau)\right]d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-\sigma)^{\beta-1}f(\sigma)\,d\sigma\right]d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\int_a^{\tau}(\tau-\sigma)^{\beta-1}f(\sigma)\,d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

on appliquons le théorème de **Fubini** et le changment variable $\tau = \sigma + s(t-\sigma)$ on trouve

$$\begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}\left\{{}_aI_t^{\beta}f(t)\right\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\sigma)^{\alpha+\beta-1}f(\sigma)\underbrace{\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}dsd\sigma}_{\boldsymbol{\beta}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-\sigma)^{\alpha+\beta-1}f(\sigma)\,d\sigma \\ &= {}_aI_t^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned}$$

alors, on obtient le résultat désiré. ■

1.4 Dérivées fractionnaires

Plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\dfrac{d^n}{dx^n}$ lorsque n n'est pas entier ($n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Dans la présente sous-section on se limite à la présentation de deux approches de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de **Riemann-Liouville** et celle de **Caputo**.

1.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5 *Soit n un entier positif tel que $n-1 < \alpha < n$.Notons ${}_a^RD_t^{\alpha}f(t)$, ${}_t^RD_b^{\alpha}f(t)$ les dérivées fractionnaires à gauche (respectevment : à droite) d'ordre α au sens de **Riemann-Liouville** est definie par :*

$$ {}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \left({}_{a}I^{n-\alpha}_{t} f(t)\right), \tag{1.17} $$

et

$$ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{b} f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \left({}_{t}I^{n-\alpha}_{b} f(t)\right). \tag{1.18} $$

C'est à dire :

$$ {}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \left[\int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right], \tag{1.19} $$

et

$$ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{b} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \left[\int_{t}^{b} (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right]. \tag{1.20} $$

En particulier :

1. Si $\alpha = 0$, on a :
$$ {}^{R}_{a}D^{0}_{t} f(t) = {}^{R}_{t}D^{0}_{b} f(t) \ = f(t). $$
2. Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :
$$ {}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{d^{n}}{dt^{n}} \left({}_{a}I^{n-n}_{t} f(t)\right) = \frac{d^{n}}{dt^{n}} \left({}_{a}I^{0}_{t} f(t)\right) = \frac{d^{n}}{dt^{n}} f(t), $$
$$ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{b} f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \left({}_{t}I^{n-n}_{b} f(t)\right) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \left({}_{t}I^{0}_{b} f(t)\right) = (-1)^{n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t), $$
C'est -à-dire que si $\alpha \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** coincide avec la dérivée usuelle.
3. Si $0 < \alpha < 1$ alors :
$$ {}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau, $$
et
$$ {}^{R}_{t}D^{\alpha}_{b} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{t}^{b} (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau. $$

Propriétes de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

1. **La linéairété**

Théorème 1.5 *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de* ***Riemann-Liouville*** *existent. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ${}_a^R D_t^\alpha (\lambda f + \mu g)$ existe, et l'on a :*

$$ {}_a^R D_t^\alpha (\lambda f + \mu g)(t) = \lambda \left({}_a^R D_t^\alpha f(t) \right) + \mu \left({}_a^R D_t^\alpha g(t) \right). $$

2. **Composition avec l'intégrale fractionnaire**

Lemme 1.1 *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$, alors les égalités :*

$$ {}^R D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t), \tag{1.21} $$

en général on a :

$$ {}^R D^\alpha I^\beta f(t) = \left({}^R D^{\alpha-\beta} f \right)(t), $$

et si $\alpha - \beta < 0$ on a :

$$ {}^R D^\alpha I^\beta f(t) = I^{\beta-\alpha} f(t), $$

mais :

$$ {}_a I_t^\alpha \left\{ {}_a^R D_t^\alpha f(t) \right\} = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left[{}_a^R D_t^{\alpha-k} f(t)\,|_{t=a} \right], \tag{1.22} $$

$$ {}_t I_b^\alpha \left\{ {}_t^R D_b^\alpha f(t) \right\} = f(t) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{(b-t)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left[{}_t^R D_b^{\alpha-k} f(t)\,|_{t=b} \right], $$

sont vraies pour presque tout $t \in [a,b]$.

Preuve. *Pour l'égalite (1.21) en utilisant la définition (1.17) on a :*

$$ {}_a^R D_t^\alpha \left\{ {}_a I_t^\alpha f(t) \right\} = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a I_t^{n-\alpha} \left\{ {}_a I_t^\alpha f(t) \right\} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a I_t^n f(t) \right) = f(t). $$

Maintenant ,pour la relation (1.22) on a :

$$ {}_a I_t^\alpha \left\{ {}_a^R D_t^\alpha f(t) \right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left\{ {}_a^R D_\tau^\alpha f(\tau) \right\} d\tau $$

$$ {}_a I_t^\alpha \left\{ {}_a^R D_t^\alpha f(t) \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left\{ {}_a^R D_\tau^\alpha f(\tau) \right\} d\tau \right\} \tag{1.23} $$

en répeter l'intgration par partie n- fois on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{{}_a^R D_\tau^\alpha f(\tau)\right\}d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\frac{d^n}{d\tau^n}\left({}_aI_\tau^{n-\alpha}f(\tau)\right)\right\}d\tau \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left\{\frac{d^{n-k}}{d\tau^{n-k}}\left({}_aI_\tau^{n-\alpha}f(\tau)\right)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-n}\left\{{}_aI_\tau^{n-\alpha}f(\tau)\right\}d\tau \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left\{{}_a^R D_t^{\alpha-k}f(t)\,|_{t=a}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-n}\left\{{}_aI_\tau^{n-\alpha}f(\tau)\right\}d\tau \\
&= {}_aI_t^1 f(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left\{{}_a^R D_t^{\alpha-k}f(t)\,|_{t=a}\right\}
\end{aligned}$$

D'aprés (1.23) on trouver :

$${}_aI_t^\alpha\left\{{}_a^R D_t^\alpha f(t)\right\} = f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\,{}_a^R D_t^{\alpha-k}f(t)\,|_{t=a}.$$

Ceci termine la preuve. ■

Remarque 1.1 *la dérivée fractionnaire au sens de* ***Riemann-Liouville*** *est l'inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire du méme ordre et ne commutent pas .*

3. **Composition avec les dérivées fractionnaires**

Soit $n-1<\alpha<n$ et $m<\beta<m-1$ alors :

$${}^R D^\alpha\left\{{}^R D^\beta f(t)\right\} = \left({}^R D^{\alpha+\beta}f\right)(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left[{}^R D^{\beta-k}f(t)\,|_{t=a}\right],$$

et

$${}^R D^\beta\left\{{}^R D^\alpha f(t)\right\} = \left({}^R D^{\alpha+\beta}f\right)(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)}\left[{}^R D^{\alpha-k}f(t)\,|_{t=a}\right].$$

4. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

Soit $n-1<\alpha<n$ on a:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left\{{}^R D^\alpha f(t)\right\} = \left\{{}^R D^{n+\alpha}f(t)\right\},$$

et

$$ {}^{R}D^{\alpha}\left\{\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right\}=\left\{{}^{R}D^{n+\alpha}f\left(t\right)\right\}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(t-a\right)^{k-\alpha-n}}{\Gamma\left(k-\alpha-n+1\right)}\left[\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)|_{t=a}\right]. $$

Donc la dérivation fractionnaire *au sens de* ***Riemann-Liouville*** et la dérivation d'ordre entière comutent si : $\frac{d^{k}}{dt^{k}}f\left(a\right)=0, k=1..n-1.$

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Beaucoup de problèmes concrets utilisent les dérivées fractionnaires avec des conditions initiales plus au moins naturelles. Malheureusement, l'approche de **Riemann-Liouville** mène à des conditions initiales contenant des valeurs limites de dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** en la borne inférieure $t=a$. Malgré la possibilité de résoudre mathématiquement avec de telles conditions initiales, leurs solutions ne sont pas encore bien comprises, puisque il n'y a pas d'interprétation physique adéquate de tel type de conditions initiales.

En 1967. **Caputo** proposa un concept modifié de la dérivation fractionnaire, qui prévoit la formulation des conditions initiales sous forme qui fait apparaitre seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t=a$ comme $f(a), f'(a), ...$ etc.

La définition formelle de la dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** est donnée par :

Définition 1.6 *La dérivée fractionnaire à gauche au sens de* ***Caputo*** *d'ordre $\alpha>0$ d'une fonction f est donnée par :*

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)={}_{a}\ I_{t}^{n-\alpha}\left(D^{n}f\left(t\right)\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{n-\alpha+1}}d\tau, \tag{1.24} $$

avec $n=\lfloor\alpha\rfloor+1$ teleque $\lfloor\alpha\rfloor$ est le partie entière de α.

Propriétes de la dérivée fractionnaire de Caputo

Théorème 1.6 (Linéairéte) *Soient $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}.\lambda\in\mathbb{C}$ si ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\ f$ et ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}g$ existent resp pour les fonctions f et g ,Alors ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}$ est linéaire, i.e.,*

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left(f+\lambda g\right)\left(t\right)=\left({}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)\right)+\lambda\left({}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}g\left(t\right)\right). $$

Lemme 1.2 *Soit $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}$. si ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}$ existe alors il vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_{\alpha\to n}\left[{}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)\right]=f^{(n)}\left(t\right).$
2. $\lim\limits_{\alpha\to n-1}\left[{}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)\right]=f^{(n-1)}\left(t\right)-f^{(n-1)}\left(a\right).$

Preuve. Par l'intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f^{(n)}(\tau)\,|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n}} d\tau \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left\{ (t-a)^{n-\alpha} f^{(n)}(a) + \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n}} d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Maintenant on calculer la limite quant $\alpha \to n$ et $\alpha \to (n-1)$on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n} \left[{}_a^C D_t^\alpha f(t) \right] &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left\{ f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \right\} \\
&= \left\{ f^{(n)}(a) + f^{(n)}(\tau)\,|_{\tau=a}^{\tau=t} \right\} = f^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n-1} \left[{}_a^C D_t^\alpha f(t) \right] &= \frac{1}{\Gamma(2)} \left\{ (t-a) f^{(n)}(a) + \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{-1}} d\tau \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2)} \left\{ (t-a) f^{(n)}(a) + (t-\tau) f^{(n)}(\tau)\,|_{\tau=a}^{\tau=t} - \int_a^t - f^{(n)}(\tau)\, d\tau \right\} \\
&= f^{(n-1)}(\tau)\,|_{\tau=a}^{\tau=t} \\
&= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat. ■

1.4.3 Relation entre les deux dérivées fractionnaires

La relation entre la dérivée fractionnaire de **Caputo** et celle de **Riemann-Liouville** sur l'intervalle $[a, b]$ est décrite par les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.7 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$,la relation entre l'opérateur de **Riemann-Liouville** (1.19) et l'opérateur de **Caputo** (1.24) est donné par :*

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a)$$

Preuve. la fonction f est écrit par serie de **Taylor** au voisinage de a sous la forme

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a)+\frac{t}{1!}f'(a)+\frac{t^2}{2!}f''(a)+\frac{t^3}{3!}f'''(a)+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+R_{n-1} \end{aligned} \tag{1.25}$$

D'aprés (1.10) on a :

$$R_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau = I^n\left\{f^{(n)}(t)\right\},$$

et

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= {}_a^R D_t^\alpha\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+R_{n-1}\right] \\ &= {}_a^R D_t^\alpha\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+I^n\left\{f^{(n)}(t)\right\}\right] \\ &= {}_a^R D_t^\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+{}_a^R D_t^\alpha\left[I^n\left\{f^{(n)}(t)\right\}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_a^R D_t^\alpha\left\{t^k\right\}}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+I^{n-\alpha}\left\{f^{(n)}(t)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+{}_a^C D_t^\alpha f(t) \\ {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a)+{}_a^C D_t^\alpha f(t) \end{aligned}$$

Donc :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a) \quad .$$

et la preuve est terminée. ■

Théorème 1.8 *Soit $\alpha>0$, Si f possède $(n-1)$ dérivées en a et si ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ existe, alors*

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right], \tag{1.26}$$

pour presque tout $x\in[a;b]$.

Preuve. D'aprés (1.17) on a :

$$ {}_a^R D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = D^n I^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], $$

tellsque $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ et

$$ I^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right]}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{1.27} $$

par l'integration par partie $(n-1)$ fois le membre droite de (1.27) on trouve :

$$ \begin{aligned} I^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= I^{n-\alpha+n} D^n \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= I^n I^{n-\alpha} D^n \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \end{aligned} $$

et comme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$ est polynome de degre $(n-1)$ alors :

$$ D^n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = 0, $$

$$ I^n I^{n-\alpha} D^n \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = I^n I^{n-\alpha} D^n f(t). $$

Donc

$$ D^n I^n I^{n-\alpha} D^n f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t) \quad , \forall t \in [a,b]. $$

Ce qui montre le résultat souhaité. ■

Remarque 1.2 *si $0 < \alpha < 1$ on a*

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha [f(t) - f(a)]. \tag{1.28} $$

Corollaire 1.1 *Soit $\alpha > 0$,si ${}_a^C D_t^\alpha$ et ${}_a^R D_t^\alpha$ existent, , on suppose que $\frac{d^k}{dx^k} f(a) = 0$ pour $k = 0 \cdots n-1$, alors*

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t). \tag{1.29} $$

1.4.4 Intégration par partie

Pour présente la corollaire (1.2) on définie les espaces ${}_aI_t^\alpha\left(L^p\right)$ et ${}_tI_b^\alpha\left(L^p\right)$ des fonctions suivants,pour $\Re\left(\alpha\right)>0, 1\leq p\leq\infty$, par

$$ {}_aI_t^\alpha\left(L^p\right)=\left\{f: f={}_a\ I_t^\alpha\varphi, \varphi\in L^p\left([a,b]\right)\right\}, $$

et

$$ {}_tI_b^\alpha\left(L^p\right)=\left\{f: f={}_t\ I_b^\alpha\varphi, \varphi\in L^p\left([a,b]\right)\right\}. $$

Corollaire 1.2 *si $\alpha>0$,et soient $p\geq 1, q\geq 1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1+\alpha$,alors les relations*

(a) si $\varphi\in L^p\left([a,b]\right)$ et $\psi\in L^q\left([a,b]\right)$ alors :

$$ \int_a^b \varphi\left(t\right)\left({}_aI_t^\alpha\psi\right)\left(t\right)dt=\int_a^b \psi\left(t\right)\left({}_tI_b^\alpha\varphi\left(t\right)\right)dt. $$

(b) si $f\in {}_aI_t^\alpha\left(L^p\right)$ et $g\in {}_tI_b^\alpha\left(L^p\right)$ alors :

$$ \int_a^b f\left(t\right)\left({}_aD_t^\alpha g\right)\left(t\right)dt=\int_a^b g\left(t\right)\left({}_tD_b^\alpha f\right)\left(t\right)dt. $$

sont vrais pour tout φ,ψ,f et g.

Preuve. voir [16] ,(**Corollaire** de **théorème** 3.5 et **corollaire** 2 de **théorème** 2.4). ■

Chapitre 2

Non éxistence de solutions globales pour des systèmes de réaction diffusion fractionnaires

Dans ce chapitre, nous montrons certains résultats de non-existence globale de solutions d'un problème fractionnaire de **Cauchy** de type parabolique de réaction diffusion avec terme non linéaire sous la forme : $|u|^{p_i}|v|^{q_i}, i = 1, 2$ telque : p_1, q_1, p_2 et q_2 des constantes.

Sommaire

2.1 Introduction **20**

2.2 Préliminaires **21**

2.3 Résultats principaux **22**

2.1 Introduction

Le problème que nous avons étudé [13] est écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.1}$$

telque : $N \geq 1, p_1, q_2 \geq 0$, $p_2, q_1 > 1$ et $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$: la dérivée d'ordre $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2.$ au sens de **Caputo** et $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$: **Laplacian** d'ordre fractionnaire où $1 \leq \beta_i \leq 2, i = 1, 2.$ définie par :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ |\xi|^{\beta_i} \mathcal{F}(u)(\xi) \right\}(x,t),$$

où $\mathcal{F}$: la transformation de **Fourier** et $\mathcal{F}^{-1}$son inverse.

Dans le cas d'une problème de diffusion réaction classique (**i.e.,** le système (2.1) avec $\alpha_i = 1$ et $\beta_i = 2, i = 1, 2.$),le systéme (2.1)est traité par nombreux auteurs et dans différents contextes (voir par exemple [3],[4],[5],[18],[19]), **Escobedo** et **Herrero** a montré dans [3] que pour $p_2 q_1 > 1$, $p_1 = q_2 = 0$ et $\frac{(\gamma+1)}{(p_2 q_1 - 1)} \geq \frac{N}{2}$ avec $\gamma = \max\{p_2, q_1\}$, alors la solution unique de système (2.1) est la solution triviale,i.e.,$u \equiv v \equiv 0$.

Aprés dans [4] avec **Escobedo** et **Levine** ont démontré si $p_1 \geq 1$ et $p_2 + q_2 \geq p_1 + q_1 > 0$, alors le système (2.1) peut être considéré comme une problème de **Cauchy** pour une seule équation $u_t - \triangle u = u^{p_1+q_1}$, avec il est verifié le théorème de explosion de **Fujita** (voir [6]) .

Dans [18] **Yamauchi** a considére le problème :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |x|^{\sigma_1} |u|^{p_1} |v|^{q_1}, \\ v_t - \Delta v = |x|^{\sigma_2} |u|^{p_2} |v|^{q_2}, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

telque $p_i, q_i \geq 0, \sigma_i \geq \max\{-2, -N\}, i = 1, 2.$et on démontrer le resultat de la non-existence sous quelques conditions dépendent du la relation entre les exposants p_i, q_i, σ_i , $i = 1, 2.$et les données initiales u_0, v_0.

Dans le cas $0 < \alpha_i < 1$ et $1 \leq \beta_i \leq 2$,**Kirane** et **al** ont traité dans [8] le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |v|^{q_1}, \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2}, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

et ont démontré que si

$$p_2 > 1, q_1 > 1, p_2 p_2' = p_2 + p_2', q_1 q_1' = q_1 + q_1',$$

et

$$N \leq \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{q_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2' q_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}} \right\}.$$

Alors le problème (2.3) n'admet aucune solution globale non-triviale.

La but de ce chapitre est prové quelques résultats de la non-existence plus généralisé que le résultat intéresant dans [8] , qui est concerne le cas $p_1 = q_2 = 0$.

2.2 Préliminaires

Définition 2.1 *soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $\phi \in L^1(0,T)$ *, on définie les dérivées à gauche et à droite d'ordre* α *de* ϕ *au sens de* ***Riemann-Liouville*** *réspectevment par :*

$$D^{\alpha}_{0|t}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \phi(\tau)\, d\tau,$$

et

$$D^{\alpha}_{t|T}\phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T (\tau - t)^{-\alpha} \phi(\tau)\, d\tau,$$

où Γ *est la fonction* ***Gamma*** *d'****Euler.***

Définition 2.2 *soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $\phi' \in L^1(0,T)$ *, on définie les dérivées à gauche et à droite d'ordre* α *de* ϕ *au sens de* ***Caputo*** *réspectevment par :*

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \phi'(\tau)\, d\tau,$$

et

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{t|T}\phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T (\tau - t)^{-\alpha} \phi'(\tau)\, d\tau,$$

où Γ *est la fonction* ***Gamma*** *d'****Euler.***

Relation entre la dérivée de Caputo et Riemann-Liouville

Il est clair que :

$$D_{0|t}^{\alpha}\phi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\phi(0)}{t^{\alpha}}+\int_{0}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}\phi'(\tau)\,d\tau\right],$$

et

$$D_{t|T}^{\alpha}\phi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\phi(T)}{(T-t)^{\alpha}}-\int_{t}^{T}(\tau-t)^{-\alpha}\phi'(\tau)\,d\tau\right].$$

Donc la relation entre les deux dérivées est définie par :

$$\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}\phi(t)=D_{0|t}^{\alpha}\left[\phi(t)-\phi(0)\right].$$

Integration par partie

La formule de l'integration par partie est donné par :

$$\int_{0}^{T}f(t)\left(D_{0|t}^{\alpha}g\right)(t)\,dt=\int_{0}^{T}g(t)\left(D_{t|T}^{\alpha}f\right)(t)\,dt.$$

Définition 2.3 *supposons que* $Q_T:=\mathbb{R}^N\times(0,T),0<T<+\infty$ *on dit que* $(u,v)\in\left(L_{loc}^{1}(Q_T)\right)^2$ *est une solution locale faible de problème (2.1) dans* Q_T *,si* $|u|^{p_i}|v|^{q_i}\in L_{loc}^{1}(Q_T)$ *,* $i=1,2$ *, et satisfait*

$$\int_{Q_T}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx+\int_{Q_T}u_0 D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 dtdx=\int_{Q_T}uD_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 dtdx+\int_{Q_T}u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1 dtdx, \quad (2.4)$$

$$\int_{Q_T}|u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 dtdx+\int_{Q_T}u_0 D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 dtdx=\int_{Q_T}vD_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 dtdx+\int_{Q_T}v(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2 dtdx, \quad (2.5)$$

pour toute fonction test $\varphi_i\in C_{x,t}^{1.2}(Q_T)$ *vérifiant* $\varphi_i(x,T)=0,i=1,2.$

2.3 Résultats principaux

Théorème 2.1 *soient* $p_1\geq 0,q_2\geq 0$ *,*$p_2>1,q_1>1,p_2p_2'=p_2+p_2',q_1q_1'=q_1+q_1'$, *et* u_0,v_0 *dans* $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ *vérifiant* $u_0,v_0\not\equiv 0$*.si*

$$N\leq N^*=\max\left\{\frac{\frac{\alpha_2}{p_2}+\alpha_1-\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2p_2q_1'}+\frac{\alpha_1}{\beta_1p_2'}},\frac{\frac{\alpha_1}{p_1}+\alpha_2-\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1p_2'q_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2q_1'}}\right\}.$$

Alors le problème (2.1) n'admet aucune solution globale faible.

Preuve. La preuve de le théorème (2.1) se fait par contradiction.
Supposons que (u,v) est une solution globale faible de (2.1),$u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \not\equiv 0$, alors $u(t), v(t) > 0$ pour tout $t \in (0, T^*)$ pour lequelle arbitraire $T^* > 0$.
Soient T et θ deux nembres réels vérifiant $0 < T < T^*$ et $\theta = \min\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$
Soit $\Phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+), 0 \leq \Phi(r) \leq 1$ pour tout $r \geq 0$,une fonction non-négative décroisante telleque :

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \text{ si } r \geq 2 \end{cases}$$

et

$$\Psi(s) = \begin{cases} (1-s)^\gamma & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad s \geq 1 \end{cases}$$

telque $\gamma \geq \max\{\alpha_1 q_1', \alpha_2 p_2'\}$.
En choisissant

$$\varphi_i(x,t) = \phi^l(x)\psi(t), i = 1, 2.$$

Avec

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^\theta}\right), \psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{T}\right) \text{ et } l \geq \max\{q_1', p_2'\},$$

D'après (2.4) et (2.5) on a :

$$\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq \int_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 dtdx + \int_{Q_T} u (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 dtdx, \tag{2.6}$$

et

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq \int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 dtdx + \int_{Q_T} v (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 dtdx. \tag{2.7}$$

On appliquer l'inégalité de **Hölder** sur la membre droite de (2.6) et (2.7) dans Ω, telque

$$\Omega = (0,T) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2T^\theta\right\}.$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| u D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \right| dtdx &= \int_\Omega \left| \left\{ u (v^{q_2} \varphi_2)^{\frac{1}{p_2}} \right\} \left\{ D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 (v^{q_2} \varphi_2)^{-\frac{1}{p_2}} \right\} \right| dtdx \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| \left\{ u (v^{q_2} \varphi_2)^{\frac{1}{p_2}} \right\} \right|^{p_2} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_\Omega \left| \left\{ D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 (v^{q_2} \varphi_2)^{-\frac{1}{p_2}} \right\} \right|^{p_2'} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} \underbrace{\left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}}_{A},
\end{aligned}$$

De méme façon

$$\int_\Omega \left| u\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1 \right| dtdx \leq \left(\int_\Omega |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} \underbrace{\left(\int_\Omega \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}}_{B}.$$

Par conséquance

$$\int_\Omega |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq \left(\int_\Omega |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} .A_1, \tag{2.8}$$

où

$$A_1 = \underbrace{\left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}}_{A} + \underbrace{\left(\int_\Omega \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}}_{B}.$$

Pour estimer (2.7) on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| v D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 dtdx \right| &= \int_\Omega \left| \left\{ v\left(u^{p_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{q_1}} \right\} \left\{ D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 \left(u^{p_1}\varphi_1\right)^{-\frac{1}{q_1}} \right\} \right| dtdx \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| v\left(u^{p_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{q_1}} \right|^{q_1} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 \left(u^{p_1}\varphi_1\right)^{-\frac{1}{q_1}} \right|^{q_1'} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} \underbrace{\left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} |\varphi|^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}}_{C},
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega \left| v\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2 \right| dtdx \leq \left(\int_\Omega |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} \underbrace{\left(\int_\Omega \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}}_{D}.$$

Donc

$$\int_\Omega |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq \left(\int_\Omega |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} .A_2, \tag{2.9}$$

où

$$A_2 = \underbrace{\left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}}_{C} + \underbrace{\left(\int_\Omega \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} |\varphi_1|^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}}_{D}.$$

On utilisant (2.8) et (2.9) on trouve :

$$\int_{\Omega} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq \left(\left(\int_{\Omega} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} A_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} A_1,$$

alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq A_1 A_2^{\frac{1}{p_2}}, \tag{2.10}$$

et

$$\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq \left(\left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} A_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} A_2,$$

alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq A_2 A_1^{\frac{1}{q_1}}. \tag{2.11}$$

Maintenent,d'aprés l'inégalité de **Ju (voir [7])**

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} \phi^l \leq l \phi^{l-1} (-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} \phi,$$

et le changment de variable suivant : $t = T\sigma, x = T^{\alpha_i/\beta_i}\xi$ dans A_i , $i = 1, 2.$ on obtient :

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq \left(CT^{\left(-\alpha_1 p_2' + \frac{\alpha_1}{\beta_1} N + 1\right) \frac{1}{p_2'}} \right) \left(\left(CT^{\left(-\alpha_2 q_1' + \frac{\alpha_2}{\beta_2} N + 1\right)} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq CT^{-\left(\frac{\gamma_1}{P_2'} + \frac{\gamma_2}{p_2 q_1}\right)}, \tag{2.12}$$

et

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq \left(CT^{\left(-\alpha_1 p_2' + \frac{\alpha_1}{\beta_1} N + 1\right) \frac{1}{p_2'}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(CT^{\left(-\alpha_2 q_1' + \frac{\alpha_2}{\beta_2} N + 1\right) \frac{1}{q_1'}} \right),$$

alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq CT^{-\left(\frac{\gamma_1}{P_2' q_1} + \frac{\gamma_2}{q_1}\right)}, \tag{2.13}$$

telque

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 p_2' - \frac{\alpha_1}{\beta_1} N - 1,\\ \gamma_2 &= \alpha_2 q_1' - \frac{\alpha_2}{\beta_2} N - 1.\end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{\gamma_1}{P_2'} + \frac{\gamma_2}{p_2 q_1} \geq 0\right)$ on a :

$$N \leq \frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \tag{2.14}$$

et $\left(\frac{\gamma_1}{P_2' q_1} + \frac{\gamma_2}{q_1} \geq 0\right)$ on a :

$$N \leq \frac{\frac{\alpha_1}{p_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2' q_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}}. \tag{2.15}$$

D'aprés (2.14) et (2.15) on pose

$$N^* = \max\left\{\frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{p_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2' q_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}}\right\}.$$

Maintenent , si nous choisissons $N < N^*$ et comme T tend vers l'infini $(T \to \infty)$ dans (2.12) et (2.13) alors :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dt dx = 0,$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dt dx = 0,$$

On utiliser le théorème de convergence dominée et la continuité en le temp et en l'espace de u et v on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} dt dx = 0,$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} dt dx = 0.$$

Qui impliquer que $u \equiv 0$ or $v \equiv 0$,donc on a **une contradiction** .

Dans le cas $N = N^*$, en prenant la fonction test ϕ pour tout $R, 0 < R < T$ sous la forme :

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{(T/R)^\theta}\right),$$

et posons :

$$\Omega_R = (0,T) \times \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2\left(\frac{T}{R}\right)^{\theta} \right\},$$

$$\triangle_R = (0,T) \times \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \left(\frac{T}{R}\right)^{\theta} \leq |x| \leq 2\left(\frac{T}{R}\right)^{\theta} \right\}.$$

Donc,d'aprés (2.12) et (2.13) on trouve :

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq C,$$

et

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq C.$$

Alors on a :

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx = 0, \tag{2.16}$$

et

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx = 0. \tag{2.17}$$

On appliquer l'inégalité de **Hölder** sur le membre droite de la formule variationnelle (2.4) et (2.5) dans Ω_R,on obtient :

$$\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq \int\limits_{\Omega_R} u D^{\alpha_1}_{t|T} \varphi_1 dtdx + \int\limits_{\Omega_R} u \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 dtdx,$$

$$\int\limits_{\Omega_R} u \left| D^{\alpha_1}_{t|T} \varphi_1 \right| dtdx \leq \left(\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} .B_1,$$

$$\int\limits_{\Omega_R} u \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right| dtdx \leq \left(\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} .C_1,$$

telque

$$B_1 = \left(\int\limits_{\Omega_R} |D^{\alpha_1}_T \varphi_1|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}},$$

$$C_1 = \left(\int\limits_{\triangle_R} \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}},$$

par conséquance

$$\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq \left(\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} B_1 + \left(\int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} C_1. \tag{2.18}$$

Pour (2.5) on a :

$$\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq \int\limits_{\Omega_R} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 dtdx + \int\limits_{\Omega_R} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 dtdx,$$

$$\int\limits_{\Omega_R} v \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right| dtdx \leq \left(\int\limits_{\Omega_R} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} B_2,$$

et

$$\int\limits_{\Omega_R} v \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right| dtdx \leq \left(\int\limits_{\triangle_R} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} C_2,$$

tellque

$$B_2 = \left(\int\limits_{\Omega_R} \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}},$$

et

$$C_2 = \left(\int\limits_{\triangle_R} \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}},$$

donc

$$\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq \left(\int\limits_{\Omega_R} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} B_2 + \left(\int\limits_{\triangle_R} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} C_2. \tag{2.19}$$

Si nous introduisons le changment de variables suivant :

$$t = T\tau, x = \left(\frac{T}{R}\right)^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \xi,$$

dans B_i et C_i et utiliser (2.16) et (2.17) et comme $T \to \infty$ on a, on obtient

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq C R^{-\left(\frac{\gamma_1'}{P_2'} + \frac{\gamma_2'}{p_2 q_1'}\right)}, \tag{2.20}$$

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq C R^{-\left(\frac{\gamma_1'}{p_2' q_1} + \frac{\gamma_2'}{q_1'}\right)}, \tag{2.21}$$

tellque

$$\gamma_i' = \frac{\alpha_i}{\beta_i} N, i = 1, 2.$$

Finalement , si nous prenons la limite quand $R \to \infty$ à (2.20) et (2.21) nous obtenons que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx = 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx = 0,$$

et nous déduisons que $u \equiv 0$ et $v \equiv 0$,ce qui contreduit notre hypothèse. ■

Théorème 2.2 *soient u_0, v_0 dans $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ sont telles que $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0, v_0 \not\equiv 0$ si*

$$p_1 > 1, q_2 > 1, p_2 \geq 0, q_1 \geq 0, 0 < \alpha_i < 1 et 1 \leq \beta_i \leq 2,$$

et

$$1 \leq N \leq \max\left\{ \beta_1 p_1' - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \beta_2 q_2' - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right\}.$$

Alors le problème (2.1) n'admet aucune solution globale positif non-nulle faible.

Preuve. La démonstration est par la contradiction.
Supposons que (u, v) est une solution globale faible de (2.1),$u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \not\equiv 0$, alors $u(t), v(t) > 0$ pour tout $t \in (0, T^*)$ telque T^* est le temps de explose.
Soient T et θ deux nembres réels vérifiant $0 < T < T^*$ et $\theta = \min\left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right\}$.
Soit $\Phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$,une fonction non-négative décroisante telleque

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \text{ si } r \geq 2 \end{cases}$$

et $0 \leq \Phi(r) \leq 1$ pour tout $r \geq 0$, et

$$\Psi(s) = \begin{cases} (1-s)^\gamma & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad s \geq 1 \end{cases}$$

telque γ est un nembre réel positif si

$$\max(\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1) \leq 0,$$

et $\gamma > (\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1)$ si

$$\min\left(\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1\right) > 0,$$

où p_1' et q_2' sont respectevement les conjuges de les exposants p_1 et q_2.
En choisissant

$$\varphi_i(x,t) = \phi^l(x)\,\psi(t), i = 1,2.$$

Avec

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^\theta}\right), \psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{T}\right) \text{ et } l \geq \max\left\{q_1', p_2'\right\},$$

Notons que

$$D_{t|T}^{\alpha_i}\varphi_i(x,t) = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha_i)} T^{-\alpha_i}\phi^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-\alpha_i}. \tag{2.22}$$

On appliquer l'inégalité de **Young** sur la membre droite de (2.6) et (2.7) dans Ω, telque

$$\Omega = (0,T) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2T^\theta\right\}.$$

on obtient

$$\int_\Omega \left|uD_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1\right| dtdx \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_1 + C(\varepsilon)\int_\Omega |D_T^{\alpha_1}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}},$$

et

$$\int_\Omega \left|u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right| dtdx \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_1 + C(\varepsilon)\int_\Omega \left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right|^{p_1'}|v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}},$$

Lorsque ε est plus petit on a

$$\int_\Omega |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx \leq C.A_1,$$

telque

$$A_1 = \int_\Omega |D_T^{\alpha_1}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}} + \int_\Omega \left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right|^{p_1'}|v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}}.$$

Et d'une façon analogue, on obtient

$$\int_\Omega |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 dtdx \leq C.A_2,$$

telque

$$A_2 = \int_\Omega \left|D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_2\right|^{q_2'}|u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} + \int_\Omega \left|(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2\right|^{q_2'}|u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}.$$

Par conséquance,comme $u > 0, v > 0$,on utilise (2.22) et l'inégalité de **Ju** (voir [7])

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi^l \leq l\phi^{l-1}(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi,$$

et on introduit le changement de variables suivant

$$t = T\sigma, x = T^{\alpha_i/\beta_i}\xi$$

dans A_i , $i = 1, 2.$ on obtient :

$$\int_{\Omega} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq CT^{-\gamma_1} \tag{2.23}$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq CT^{-\gamma_2} \tag{2.24}$$

telque

$$\gamma_1 = \alpha_1 p_1' - \frac{\alpha_1}{\beta_1} N - 1,$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 q_2' - \frac{\alpha_2}{\beta_2} N - 1.$$

Comme $\gamma_1 \geq 0$ on a

$$N \leq \beta_1 p_1' - \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

et $\gamma_2 \geq 0$ on a

$$N \leq \beta_2 q_2' - \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Nous posons

$$N^* = \max\left\{\beta_1 p_1' - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \beta_2 q_2' - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right\}.$$

Maintenant, si on choisis $N < N^*$ et en passant à la limite quand T tend vers l'infini $(T \to \infty)$ dans (2.23) et (2.24) alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx = 0,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx = 0.$$

D'aprés la continuité des fonctions u et v avec le théorème de la convergence dominée de **Lebesgue** nous obtenons que

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} = 0,$$

alors $u \equiv 0$ or $v \equiv 0$,donc on a_**une contradiction** .

Dans le cas $N = N^*$,on modéfie la fonction test ϕ, on introduit un autre nembre $R, 0 < R < T$, comme suit

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{(T/R)^{\theta}}\right),$$

et on pose Ω_R et $\triangle_R$ par

$$\Omega_R = (0,T) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2\left(\frac{T}{R}\right)^{\theta}\right\},$$

$$\triangle_R = (0,T) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N : \left(\frac{T}{R}\right)^{\theta} \leq |x| \leq 2\left(\frac{T}{R}\right)^{\theta}\right\}.$$

D'aprés (2.23) et (2.24) on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \leq C,$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq C,$$

alors on a

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx = 0, \tag{2.25}$$

et

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx = 0. \tag{2.26}$$

Nous appliquons l'inégalité de**Young** de **Hölder** sur le membre droite de (2.4) dans Ω_R,nous obtenons :

$$\int\limits_{\Omega_R} u \left|D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1\right| \leq \varepsilon \int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 + C(\varepsilon) . B_1,$$

et

$$\int\limits_{\Omega_R} u \left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1\right| \leq \left(\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx\right)^{\frac{1}{p_1}} . C_1,$$

où

$$B_1 = \int\limits_{\Omega_R} \left|D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1\right|^{p_1'} |v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}},$$

$$C_1 = \left(\int\limits_{\triangle_R} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1\right|^{p_1'} |v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1'}}$$

par conséquance

$$\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \leq C.B_1 + \left(\int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} .C_1,$$

de maniére similaire,utilisant (2.5) on obtient l'estimation

$$\int\limits_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq C.B_2 + \left(\int\limits_{\triangle_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2}} .C_2,$$

où

$$\begin{aligned} B_2 &= \int\limits_{\Omega_R} \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}, \\ C_2 &= \left(\int\limits_{\triangle_R} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}}, \end{aligned}$$

Si nous utilisons le changment de variables suivant :

$$t = T\tau, x = \left(\frac{T}{R} \right)^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \xi,$$

dans B_i et C_i et utiliser (2.25) et (2.26) et comme $T \to \infty$ on a, on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \leq C R^{-\gamma_1'}, \tag{2.27}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq C R^{-\gamma_2'}, \tag{2.28}$$

tellque

$$\gamma_i' = \frac{\alpha_i}{\beta_i} N, i = 1, 2.$$

Si nous passons à la limite quand $R \to \infty$ à (2.27) et (2.28) nous obtenons que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dt dx = 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dt dx = 0,$$

Alors on a **contradiction** car $u \equiv 0$ et $v \equiv 0$. ■

Remarque 2.1 *on peut étendre nos résultats à des systèmes plus généraux*

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \left(|u|^{m-1} u \right) = h \, |u|^{p_1} |v|^{q_1} + g \, |u|^{r_1} |v|^{s_1}, \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \left(|v|^{m-1} v \right) = k \, |u|^{p_2} |v|^{q_2} + l \, |u|^{r_2} |v|^{s_2}, \end{cases}$$

sous certaines bonnes hypothèses sur $h(x,t), g(x,t), k(x,t)$ *et* $l(x,t)$.

Chapitre 3

Conditions nécessaires d'existence locale et globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnaires

Dans ce chapitre, nous donnons certains conditions nécessaires d'existence locale et globale de solutions d'un problème fractionnaire de Cauchy de type réaction diffusion (2.1) avec terme non linéaire sous la forme : $|u|^{p_i}|v|^{q_i}, i = 1, 2$ telque : $p_1 > 1, q_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ et $q_2 > 1$ des constantes.

Sommaire

3.1 Conditions nécessaires pour l'existence locale **36**

3.2 Conditions nécessaires pour l'existence globale **40**

3.1 Conditions nécessaires pour l'existence locale

Théorème 3.1 *Soit* $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0, p_1 > 1, q_2 > 1, p_2 \geq 0$ *et* $q_1 \geq 0$. *si* (u, v) *une solution faible locale* $(T < +\infty)$ *du problème (2.1). Alors,*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) \leq C_1 T^{-\frac{\alpha_1}{P_1 - 1}}, \tag{3.1}$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) \leq C_2 T^{-\frac{\alpha_2}{q_2 - 1}}, \tag{3.2}$$

où C_1 *et* C_2 *sont des conctantes.*

Corollaire 3.1 *sous les conditions de théorème (3.1), si* (u, v) *une solution faible globale du problème (2.1). Alors,*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) = 0,$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) = 0.$$

Corollaire 3.2 *sous les conditions de théorème (3.1), si*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) = \lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) = +\infty,$$

alors la problème (2.1) n'admet aucune solution faible locale non négative non triviale.

Preuve. Supposons que (u, v) est une solution locale faible de (2.1),$u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \not\equiv 0$, alors $u(t), v(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$ telque $T < T^*$ est le temps d'explosion.
En prenant les fonctions test dans (2.4) et (2.5) de la forme

$$\varphi_i(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^l & 0 < t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\Phi \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est positif, à support dans $\{R < |x| < 2R\}$ et vérifie

$$\left((-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} \Phi\right)_+ \leq k_i \Phi \text{ pour une certaine constante } k_i > 0. \tag{3.4}$$

L'exposant l, introduit dans (3.3), est un nembre réel positif si

$$\max(\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1) \leq 0,$$

et $l > (\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1)$ si

$$\min(\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1) > 0,$$

où p_1' et q_2' sont respectevement les conjuges de les exposants p_1 et q_2.
De plus, notons que

$$D_{t|T}^{\alpha_i}\varphi_i(x,t) = \Lambda_i T^{-\alpha_i}\Phi\left(\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{l-\alpha_i}, \tag{3.5}$$

telque

$$\Lambda_i = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+l-\alpha_i)}.$$

Grâce à la formulation variationnelle (2.4), nous avons

$$\int\limits_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 \leq \int\limits_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 + \int\limits_{Q_T} u\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1,$$

et

$$\int\limits_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 \leq \int\limits_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 + \int\limits_{Q_T} u\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1,$$

En utilisant l'inégalité de **Hölder**, nous obtenons

$$\int\limits_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 \leq \left(\int\limits_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.A_1,$$

et

$$\int\limits_{Q_T} u\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1 \leq \left(\int\limits_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.A_2,$$

où

$$A_1 = \left(\int\limits_{Q_T}\left|D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1\right|^{p_1'}|v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1'}},$$

et

$$A_2 = \left(\int\limits_{Q_T}\left|\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right|^{p_1'}|v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1'}}.$$

Donc

$$\int\limits_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 \leq \left(\int\limits_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.A,$$

et

$$\int\limits_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 \leq \left(\int\limits_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.A,$$

telque $A = A_1 + A_2$.

Par conséquence

$$\int_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \leq A^{p_1'}. \tag{3.6}$$

Et d'une façon analogue, pour la formule (2.5), on obtient

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq \int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 dtdx + \int_{Q_T} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 dtdx,$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq \int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 dtdx + \int_{Q_T} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 dtdx.$$

En utilisant l'inégalité de **Hölder**, nous obtenons

$$\int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 dtdx \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2}} .B_1,$$

$$\int_{Q_T} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2}} .B_2,$$

où

$$B_1 = \left(\int_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}},$$

et

$$B_2 = \left(\int_{Q_T} \left| \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}}.$$

Donc

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2'}} .B,$$

et

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2'}} .B,$$

telque $B = B_1 + B_2$.

Par conséquence

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq B^{q_2'}. \tag{3.7}$$

Maintenant, on considére le changement de variables

$$t = T\tau \text{ et } x = Ry,$$

Tenant compte de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} A &= \left(\int\limits_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \right|^{p_1'} |v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1'}} + \left(\int\limits_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right|^{p_1'} |v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1'}} \\ &\leq C R^{\frac{N}{p_1'}} \left(T^{\frac{1}{p_1'}+\alpha_1} + T^{\frac{1}{p_1'}} R^{-\beta_1} \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p_1'}}. \end{aligned}$$

Et utilisant (3.5), on obtient

$$\int\limits_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 = \frac{\Lambda_1 T^{1-\alpha_1} R^N}{1+l-\alpha_1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry)\, \Phi(y)\, dy.$$

De même, si on applique une seconde fois (3.4) et (3.5), il vient

$$B = \left(\int\limits_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}} + \left(\int\limits_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}} \tag{3.8}$$

$$\leq C R^{\frac{N}{q_2'}} \left(T^{\frac{1}{q_2'}+\alpha_2} + T^{\frac{1}{q_2'}} R^{-\beta_2} \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy \right)^{\frac{1}{q_2'}}, \tag{3.9}$$

et

$$\int\limits_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 = \frac{\Lambda_2 T^{1-\alpha_1} R^N}{1+l-\alpha_2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_0(Ry)\, \Phi(y)\, dy. \tag{3.10}$$

Par conséquent

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry)\, \Phi(y)\, dy \leq C_1 \left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1} \right)^{p_1'} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy, \tag{3.11}$$

où C_1est un constant positif indépendant de R et T.

Donc

$$\begin{aligned} \inf_{|y|>1} u_0(Ry) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy &\leq C_1 \left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1} \right)^{p_1'} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy \\ \inf_{|y|>1} u_0(Ry) &\leq C_1 \left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1} \right)^{p_1'}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Enfin, faisant tendre $R \to \infty$ dans (3.12), on conclut que

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) \leq C_1 T^{-\frac{\alpha_1}{p_1} p_1'}.$$

Donc l'estimation (3.1) est ainsi prouvée

Maintenant,on utilisant (3.7),(3.8) et (3.10), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(Ry)\,\Phi(y)\,dy \leq C_2 \left(T^{-\frac{\alpha_2}{q_2}} + T^{\frac{\alpha_1}{q_2'}} R^{-\beta_2}\right)^{q_2'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\,dy. \tag{3.13}$$

alors

$$\inf_{|y|>1} v_0(Ry) \leq C_2 \left(T^{-\frac{\alpha_2}{q_2}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1}\right)^{q_2'}. \tag{3.14}$$

Donc quand $R \to \infty$ dans (3.14), on a

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) \leq C_2 T^{-\frac{\alpha_2}{q_2} q_2'},$$

et l'estimation (3.2) est prouvée. ■

3.2 Conditions nécessaires pour l'existence globale

Théorème 3.2 *Supposons que le problème (2.1) admet une solution faible non-négative globale et non-triviale. Alors il existe deux constantes C_3 et C_4 tellesque*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_3, \tag{3.15}$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \leq C_4, \tag{3.16}$$

Preuve. . D'aprés l'expression (3.11) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry)\,\Phi(y)\,dy \leq C_1 \left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1}\right)^{p_1'} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\,dy, \tag{3.17}$$

que l'on multiplie par $|Ry|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} |Ry|^{-\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$ à l'intérieur de l'intégrale et dans les deux membres. En tenant compte du fait que supp $\Phi \subset \{1 < |y| < 2\}$, l'expression (3.17) devient

$$\lim_{|x|>R} \inf u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 \left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1}\right)^{p_1'} (2R)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}.$$

En prenant $T = R$, il résulte

$$\lim_{|x|>R} \inf u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1\,(2)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \left(1 + R^{\alpha_1-\beta_1}\right)^{p_1'}.$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini $(R \to \infty)$ et comme $\alpha_1 < \beta_1$, on obtien

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}},$$

on pose $C_3 = C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$,et l'inégalite (3.15) est trouvée.
Maintenant, pour l'inégalité (3.16) ,on multiplie (3.13) par $|Ry|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} |Ry|^{-\frac{\alpha_2}{q_2-1}}$,et on peut écrire

$$\lim_{|x|>R} \inf v_0 |x|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \leq C_2 \left(T^{-\frac{\alpha_2}{q_2}} + T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}} R^{-\beta_1} \right)^{q_2'} (2R)^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}},$$

donc pour $T = R$ on a

$$\lim_{|x|>R} \inf v_0 |x|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \leq C_2 2^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \left(1 + R^{\alpha_2-\beta_2}\right)^{q_2'}.$$

Quand, en passant à la limite et comme $\alpha_2 < \beta_2$,nous obtenons

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0 |x|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \leq C_2 2^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}}.$$

Ainsi, l'inégalité (3.16) a lieu pour $C_4 = C_2 2^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}}$. ■

Conclusion Générale

Au terme de ce mémoire , nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires , en ouvrant de noueaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail, nous avons présenté des résultats de non-existence des solutions globales non triviales pour certains systèmes de réaction-diffusion d'ordre fractionnaire par rapport au temps et à l'espace relatifs à la dérrivée de Caputo d'ordre compris entre 0 et 1.

Par ailleurs , nous avons donné les conditions nécessaires d'existences locale et globale pour le même problème, ce qui représente une autre façon d'étudier la non-existence des solutions, puisque la négation des conditions nécessaires d'éxistence, donne des conditions suffisantes pour la non-existence.

Perspectives

Les résultats présentés dans ce mémoire offrent natturellement de nombreuses perspectives :

1. La première est l'étude systèmes de réaction-diffusion fractionnaires dont l'ordre est compris entre 1 et 2.
2. La deuxième perspective envisageable serait l'étude des systèmes de m équations, $m > 2$.

Bibliographie

[1] J. Blackledge, Application of the fractional diffusion equation forpredicting market behavior, IAENG Int. J. Appl. Math, 40 (2010), 130-158.

[2] H. Brézis, “Analyse fonctionnelle : Théorie et applications”, Masson.Paris (1987).

[3] M. Escobedo and M. A. Herrero, Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion equation, J. Diff. Equations 89 (1991), 176-202.

[4] M. Escobedo and H. A. Levine, Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Arch. Rational. Mech. Anal. 129 (1995), 47-100.

[5] M. Fila, H. A. Levine and Y. Uda, A Fujita-type global existence-global nonexistence theorem for a system of reaction diffusion equations withdiffering diffusivities, Math. Methods Appl. Sci. 17 (1994), 807-835.

[6] H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 13 (1966), 109-124.

[7] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasi-geostrophic equations, Comm. Math. Phys. 255 (2005), 161-181.

[8] M. Kirane, Y. Laskri and N. E. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005), 488-501

[9] M. Kirane and M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002), 217-243.

[10] V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal. 69 (2008), 2677-2682.

[11] J. D. Munkhammar, Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series, Uppsala University, Department of Mathematics, 2004.

[12] I. Podlubny, “Fractional differential equations”, Math. Sci. Engrg., vol 198, Academic Press, New York, 1999.

[13] B. Rebiai and K. Haouam, Nonexistence of global solutions to a nonlinear fractional reaction-diffusion system, IAENG Int. J. Appl. Math. 45(4) (2015), 259-262.

[14] B. Rebiai, S. Benzeghari and K.Haouam, Necessary conditions of existence for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives.Novi Sad J. Math.(2016), pp 1-9.

[15] B. Rebiai, S. Rouar and K. Haouam, Critical exponents for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives.Global Journal of Pure and Appl. Math.6(2016), 5343–5351.

[16] S. G. Samko, A. A. Kilbass and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[17] Q. Feng, Interval oscillation criteria for a class of nonlinear fractional differential equations with nonlinear damping term, IAENG Int. J. Appl. Math. 43 (2013), 154-159.

[18] Y. Yamauchi, Blow-up results for a reaction-diffusion system, Methods Appl. Anal. 13 (2006), 337-350.

[19] S. Zheng, Global existence and global non-existence of solutions to a reaction-diffusion system, Nonlinear Anal. 39 (2000), 327-340.